

«Действительный анализ» (2 курс, 4 семестр)**1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.**

Определение. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость – в случае постоянных пределов интегрирования. Непрерывность, дифференцируемость (формула Лейбница) – в случае переменных пределов интегрирования.

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение. Понятие равномерной сходимости интеграла на множестве, критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини равномерной сходимости. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость несобственных интегралов. Теорема о несобственном интегрировании интегралов, зависящих от параметра. Примеры: вычисление интеграла Эйлера-Пуассона, интеграла Дирихле.

3. Интегралы Эйлера.

Определения гамма-функции и бета-функции. Область определения, непрерывность и дифференцируемость. Формулы приведения для гамма-функции и бета-функции, гамма-функция полуцелого положительного аргумента. Связь между эйлеровыми интегралами.

4. Формула Стирлинга.

Лемма о построении асимптотики методом Лапласа. Вывод асимптотики гамма-функции.

5. Задача о наилучшем приближении в евклидовом пространстве. Общие ряды Фурье.

Бесконечномерные евклидовы и псевдоевклидовы пространства, нормированные и почтинормированные пространства. Ортонормированные системы, тригонометрическая система функций. Решение задачи о наилучшем приближении, тождество Бесселя, неравенство Бесселя.

6. Замкнутые и полные системы.

Определение замкнутости системы. Равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье по норме. Полнота. Теорема о связи свойств замкнутости и полноты ортонормированных систем. Теорема о единственности ряда Фурье.

7. Сходимость средних Чезаро для тригонометрического ряда Фурье.

Интегральные представления частичных сумм и их средних Чезаро для тригонометрического ряда Фурье (ТРФ). Ядра Дирихле, ядра Фейера, их свойства. Теорема Фейера о равномерной сходимости, локальная теорема Фейера.

8. Замкнутость тригонометрической системы.

Теорема о замкнутости. Следствия замкнутости тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

9. Простейшие условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Равномерная сходимость ТРФ для функций, имеющих кусочно-непрерывную производную. Достаточные условия почленного дифференцирования ТРФ. Оценка скорости сходимости.

10. Уточненные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Свойства коэффициентов Фурье функций двух переменных. Главная часть частичной суммы ТРФ на множестве и в точке. Принцип локализации Римана. Функциональные классы Гёльдера, примеры. Равномерная сходимость ТРФ для функций из класса Гёльдера. Сходимость ТРФ в точке для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Тригонометрический ряд Фурье на произвольном множестве, комплексная форма записи.

11. Интеграл Фурье.

Понятие преобразования Фурье для функций из класса $L_1(\mathbb{R})$. Свойства образа Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Понятие о разложении функции в интеграл Фурье. Теорема о разложении для функций из класса Гёльдера. Разложения в терминах косинус- и синус-преобразований Фурье.